第27卷 第6期　工 程 数 学 学 报　Vol. 27 No. 6
2010年12月　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-0975-11

智能排班问题的概率约束规划模型与有效求解*

陈志平[1]，刘　嘉[1]，程　蓓[2]

(1- 西安交通大学理学院科学计算与应用软件系，西安　710049;
2- 西安交通大学金禾经济研究中心，西安　710049)

摘　要: 由于其广泛的应用领域与难解性，对不同形式智能排班问题的研究现已成为运筹学界的一个研究热点。为克服现有模型无法恰当反映人力需求约束实际特征与求解算法效率低等不足，本文对综合排班问题构建了两种不同形式的概率约束随机规划模型。利用样本平均近似方法和“大M方法”，我们将概率约束问题转化为大规模整数线性规划问题，并综合运用了Lagrange松弛法、分解算法与信赖域算法等方法的思想，设计出了一有效的嵌套分解算法。最后，通过数值算例说明了本文模型的合理性与所设计算法的有效性。

关键词: 智能排班；人力需求；概率约束；样本平均近似；大M方法；Lagrange松弛；信赖域

分类号: **AMS**(2000) 90C15　　**中图分类号**: O221.5　　**文献标识码**: A

1　引言

所谓排班问题，即是在给定的一系列要求(比如每天的用工人员需求、工作强度要求、劳动保障要求等)之下，对给定数量的工作班组进行合理的工休安排。在过去，排班往往是一个人工统筹的过程，但随着大型呼叫中心等现代服务模式的出现，如此大规模的排班是手工不可能完成的任务。这时，利用计算机找到一种新的智能化方法就成为该问题的解决之道。智能排班旨在利用计算机与现代优化技术解决劳动力管理问题，为客户安排最佳任务，使其在满足未来需求预测的情况下，还能满足运营商的各种人性化需求(包括班组间的均衡)。它在现代服务行业，诸如发电、电信、金融等领域正在被广泛采用。对于劳动密集型行业，其运营成本和运营效率很大程度上取决于如何更有效地安排员工的工作任务，智能排班方法正是根据预测估计相应的人力需求，合理安排任务，以达到人力资源最有效利用的目的。

自文献[1]提出道路收费亭问题的集合覆盖模型以来，数学规划技术已被广泛应用于排班问题的建模与求解中。基于对员工排班的不同刻画，现有的模型可分为三类：工休排班、班次排班和综合排班[2]。工休排班是在一个周期内为员工安排工作日和休息日[3]；班次排班仅考虑一天的情况，在该天内为员工安排上班时间和休息时间[4]；综合排班则将工休排班和班次排班相结合，既确定一个周期内的工作日和休息日，又为每个工作日安排上班时间和休息时间[5]。

由于其简单、直观、易操作等特性，确定性数学规划模型在员工排班中占据研究与应用的主体。几乎所有这些模型均是在最佳满足业务需求的条件下，最小化人力成本。根据具体的应用环境，此模型有多种不同角度的推广，典型的包括更精细地划分时间段[6]、更人性化地分配员工工作时间[7]、抑或加入各种连续上班和连班间隔等约束[8]。

至于如何具体表达各种业务需求，目前主要有如下两种描述方式。一种是利用单边不等式或双边不等式，保证各时段所安排人数大于某预定值(如人力需求的预测值)，或限定其处于某

收稿日期: 2010-08-12.　**作者简介**: 陈志平(1964年8月生)，男，博士，教授. 研究方向：最优化理论与数理金融.
***基金项目**: 国家自然科学基金(70971109).

个范围内。单边不等式法能有效地保证任意时刻的人力需求都能得以满足，但缺点是不能限定每个时刻应安排人力的上限，这有时会导致人员冗余严重；而双边不等式法在单边不等式的基础上，对每时刻的人力增加一个上界，从而限制了人员冗余的程度，但如何选取这样的上界是较为困难的问题。如果选取得太小，则可能导致模型无解；若选取得过大，又难以达到将人员冗余平摊的目的。另一种是文献 [2,9] 等中提出的目标规划方法。这种方法最大的特点在于放松了严格的上、下界要求，将实际安排人力与预测人力的偏离程度作为目标来最小化。

虽然确定性模型有多种人力需求约束的刻画方式，但其确定性需求量的假设严重限制了它的应用范围与应用效果。熟知，智能排班中最核心的内容就是要最优地满足不同的资源需求。然而，未来的资源需求量是事先无法预知的随机量，而预测其最合适的取值又是很困难的[10]。鉴于此，一个自然的想法就是直接将资源需求作为随机变量，用随机规划方法来描述需求约束，已有文献中有两种常见的处理方法：一是将人力需求约束不满足程度的期望值作为惩罚加入目标函数，此即随机目标规划法[11]；二是将人力需求约束满足的概率作为关注重点，对满足的概率值加以约束，即概率约束规划法[12,13]。这两种方法各有优缺点。随机目标规划从平均的角度去度量人力需求约束的满足情况，不能有效刻画随机需求分布的尾部特性对约束的影响；概率约束规划将不好的事件发生的概率限定在某个范围之内，这样能够根据实际要求灵活选择概率阀值，但如何设置合适的置信度比较困难，且这类约束没有考虑在约束限定之外的极端情况。

对所建立随机模型的求解，与现有求解概率约束问题的方法一样，通常的做法是从随机变量的分布特性入手，将概率约束转化为确定性约束，再利用求解确定性规划问题的相关算法予以处理。至于如何将概率约束确定化，主要有三种思路：一是在假设正态分布、t分布等特殊分布之下，直接将概率约束转化为等价的确定性约束[14]；二是利用平均话务率等参数，基于排队论中采用的分布模型来推导出人力需求量服从的分布[11,12]，再通过抽样方法将概率约束确定化；三是直接假设随机人力需求服从某个离散分布[15,16]，将一个周期内的人力需求模拟为数种不同的需求向量，每组向量代表需求的一组实现，再对每个向量赋予一定的概率 (如等概率)，使总概率为 1。以文献 [17] 中的构造法为例：它将需求分为周期内每日需求模式与每天内每小时需求模式两层，每一层又可根据增长趋势、凹趋势等不同类型构造 6 种模式，再将这两层结合起来产生离散分布的样本。有了离散分布，就可直接将概率约束转化为通常的确定性约束。

从实际调研中我们发现，对于现实中的排班问题，相对于人力需求约束满足程度偏差之大小，客户更为关注的是偏差存在的情形是否过多、能否在大多数情况下使人力需求得到满足和如何恰当描述并与灵活控制人力需求约束等随机性约束的满足。另外，对于人力需求等约束，硬性的下界约束很容易导致人员冗余严重，如何在某些时段的人力不足与另一些时段的人员冗余间建立平衡以使人力成本最低，至今还没有好的解决方法。最后，对于现实中复杂的大规模排班问题，现有求解随机模型的算法效率比较低，怎样设计可快速求解的有效算法是亟待解决的难题。

针对已有文献的上述不足，本文将就综合排班问题的建模与求解进行研究。为灵活而恰当地描述人力需求约束，我们引入人力不足量的概念，通过对其设定下界，并选取适当的置信水平，建立两类不同形式的概率约束条件来刻画人力需求约束；为权衡人力不足与人力冗余等问题，我们在建模时引进加权惩罚的思想；不同于现有方法，为有效求解所建立的概率约束规划问题，我们采用随机规划领域中新近提出的样本平均近似方法来将概率约束规划问题转化为确定性整数规划问题，并利用“大 M 方法”的思想将其线性化；为快速求解所导出的大规模整数规划问题，我们综合运用了 Lagrange 松弛法、分解算法与信赖域算法等方法的思想，设计出

了一有效的嵌套分解算法。最后通过数值算例说明本文模型的合理性与所设计算法的有效性。

2 模型介绍

为灵活反映实际中对人力需求约束的不同要求，我们将依据该类约束所限定的范围，采用两种概率约束形式进行建模：一种是分别对每个时段加以限制，另一种则是对整个周期引入统一的一个约束。

考虑有 T 个时段，J 个班次的排班问题，我们首先探讨对各个时段分别加以限制的模型。为精细刻画不同时段上人力需求的满足程度，将每个时段上所安排人数与该时段实际需求人数 $r_t, t=1,\cdots,T$ 的差定义为人力不足量，同时给每个人力不足量一个下限 $-\delta_t, t=1,\cdots,T$。在每个时段上，根据问题的具体要求，保证人力不足量不低于 $-\delta_t$ 的概率不小于某个置信度 α_t。以极小化总的人力需求为目标，我们可建立下列概率约束规划模型

$$\min \quad \sum_{j=1}^{J} x_j \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad P\Big(\sum_{j=1}^{J} a_{tj}x_j - r_t \geq -\delta_t\Big) \geq \alpha_t, \quad t=1,2,\cdots,T, \tag{2}$$

$$x \in X, \tag{3}$$

其中 $j=1,\cdots,J$ 表示不同的班次，要求任意两个班次均不相同。$a_{tj}\in\{0,1\}$ 表示班次 j 在时段 t 是否为上班状态，1 表示上班，0 表示不上班。x_j 为决策变量，即上班次 j 的员工数。X 表示除人力需求约束 (2) 外的其它所有约束。例如，X 可包含如下三种典型的限制。

一是变量取整及其大于等于零的约束

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j=1,2,\cdots,J.$$

二是公平性约束，即要求周期内所有上班员工的平均工作时长为预先给定的值 AH

$$\Big(\sum_{j=1}^{J} l_j x_j\Big) = AH\sum_{j=1}^{J} x_j,$$

其中 l_j 表示班次 j 在排班周期内的上班时长。

三是特殊班次限制，即要求不同班次集合 r 中安排的员工人数不小于某预先给定的下界 $SR_r^{\min}$，同时不大于某预先给定的上界 $SR_r^{\max}$

$$\sum_{j\in G_r} x_j \geq SR_r^{\min}, \quad \sum_{j\in G_r} x_j \leq SR_r^{\max}, \quad \forall\, r \in \Delta,$$

其中 G_r 表示班次集合 r 中包含的班次。Δ 表示所有需满足相应类型约束的班次集合的集合。

当然，我们还可根据实际需要，增加更多更详细的约束，因这部分约束并不牵扯随机因素，故而可参考文献 [18,19] 等中确定性排班问题的建模方法。因非本文考虑的重点，以下不再对其进行详细论述。

若不对不同时段赋予特定的满足概率值，则可采用统一的置信水平，并给出另一种形式的概率约束表述：设要求各个时段上人力不足量均不低于最低限度的概率不小于某个置信度 α，

则可构建如下的联合概率约束模型

$$\min \quad \sum_{j=1}^{J} x_j \tag{4}$$

$$\text{s.t.} \quad P\Big(\sum_{j=1}^{J} a_{tj}x_j - r_t + \delta_t \geq 0,\ t = 1,\cdots,T\Big) \geq \alpha, \tag{5}$$

$$x \in X. \tag{6}$$

上述两种模型 (1)-(3) 和 (4)-(6) 与已有文献中的模型[12,13] 相比更加灵活，可根据对不同天、不同时段的关注程度加以不同的偏差容忍程度和概率约束满足程度。同时，在 X 中也综合考虑了确定性排班文献中较新的成果[18,19]。

3 模型求解

相较概率约束规划模型 (1)-(3)，联合概率约束 (5) 中的概率事件并非由单一线性不等式所表示，而是由 T 个线性不等式联合表示。对此，可通过无穷范数将其表示为由一个不等式表示的概率事件的形式。为书写方便并用统一方式表达这两种概率约束模型，我们引入以下记号。首先，令

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_J)^{\mathrm{T}} \in R^J, \quad r = (r_1, r_2, \cdots, r_T)^{\mathrm{T}} \in R^T, \quad f(x) = \sum_{j=1}^{J} x_j.$$

进而，记

$$G_t(x, r_t) = \sum_{j=1}^{J} a_{tj}x_j - r_t + \delta_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T,$$

$$q_t(x) = P\big(G_t(x, r_t) \geq 0\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{(0,\infty)} G_t(x, r_t)\big), \quad t = 1, 2, \cdots, T.$$

这里 $\mathbb{1}_{(0,\infty)} G_t(x, r_t)$ 表示指示函数，即当 $G_t(x, r_t) \geq 0$ 时，$\mathbb{1}_{(0,\infty)} G_t(x, r_t) = 1$，当 $G_t(x, r_t) < 0$ 时，$\mathbb{1}_{(0,\infty)} G_t(x, r_t) = 0$。类似地，记

$$G(x, r) = \min\Big\{\sum_{j=1}^{J} a_{tj}x_j - r_t + \delta_t,\ t = 1,\cdots,T\Big\},$$

$$q(x) = P\big(G(x, r) \geq 0\big),$$

则概率约束模型 (1)-(3) 就可转化为

$$\min \quad f(x) \tag{7}$$

$$\text{s.t.} \quad q_t(x) \geq \alpha_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \tag{8}$$

$$x \in X, \tag{9}$$

而概率约束模型 (4)-(6) 则可转化为

$$\min \quad f(x) \tag{10}$$

$$\text{s.t.} \quad q(x) \geq \alpha, \tag{11}$$

$$x \in X. \tag{12}$$

因转化后的两个模型具有相同的形式，以下仅就概率约束模型 (7)-(9) 的求解展开论述。

为克服已有算法对分布类型的依赖性、难于实现的不足，我们采用随机规划领域中新近提出的样本平均近似[14,20] 策略来转化概率约束，其最大的优点在于不需要假定原始的分布类型，仅仅通过抽取一组样本来近似原随机分布，且可保证收敛性。

对随机变量 r_t，设 $r_t^i, i=1,\cdots,I$，为 r_t 的 I 个独立同分布的样本。我们用这 I 个样本来近似其本身的分布，并用这些样本的平均来近似其原本分布的期望，即用

$$\widehat{q}_t(x)=\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{I}\mathbb{1}_{(0,\infty)}\big(G_t(x,r_t^i)\big)$$

来近似代替 $q_t(x)$。那么，对于给定的概率或置信水平 $\gamma_t\in[0,1]$, $t=1,\cdots,T$，问题 (7)-(9) 则可转化为下列最优化问题

$$\min \quad f(x) \tag{13}$$

$$\text{s.t.} \quad \widehat{q}_t(x)>\gamma_t, \quad t=1,2,\cdots,T, \tag{14}$$

$$x\in X. \tag{15}$$

我们将此问题称之为原问题 (7)-(9) 在置信水平 γ_t, $t=1,\cdots,T$ 下的样本平均近似问题。关于上述样本平均近似方法的收敛性，由文献 [21] 中的分析，我们有如下结论。

定理 1　假设原问题与样本平均近似问题的置信度相同即，$\gamma_t=\alpha_t$, $t=1,\cdots,T$，且除概率约束外的可行域为紧集，$G(x,r)$ 为 Caratheodory 函数，且有如下条件成立：设原问题的最优解为 $\overline{x}$，对任给的 $\epsilon>0$，存在 $x\in X$，使得 $\|x-\overline{x}\|\le\epsilon$ 和 $q_t(x)>\alpha$，则 $\widehat{v}_I\to v^*$，且当 $I\to+\infty$ 时，以概率 1 有 $D(\widehat{S}_I,S)\to 0$，这里 $\widehat{v}_I$, $\widehat{S}_I$ 分别表示样本平均近似问题 (13)-(15) 的最优值和可行集，而 v^*, S 分别表示原问题 (1)-(4) 的最优值和可行集，$D(\widehat{S}_I,S)$ 表示集合 $\widehat{S}_I$ 与 S 之间的距离。

对比样本平均近似问题与通常离散分布下所得问题可以看出，样本平均近似也可被看做一种具有 I 个相等概率样本的特殊分布。在置信度不变的情况下，当 I 趋于无穷大的时候，样本平均近似问题的解收敛于原问题的解。在 I 足够大的情况下，若 $\gamma_t\ge\alpha_t$, $t=1,\cdots,T$，则样本平均近似问题的可行解亦是原问题的可行解，而当 $\gamma_t<\alpha_t$, $t=1,\cdots,T$ 时，样本平均近似问题的最优值是原问题的下界。所以样本平均近似方法也可用于构造可行解或是估计最优解的下界。

因 $\widehat{q}_t(x)$ 中含有非光滑的示性函数，导致问题 (13)-(15) 难于处理。为此，我们使用类似文献 [20] 中的“大 M 方法”，通过引入辅助变量来将示性函数转化为线性形式。具体地，令

$$z_t^i=\begin{cases}1, & 若\ G_t(x,r_t^i)\ge 0,\\ 0, & 其他,\end{cases} \tag{16}$$

则 $\hat{q}_t(x)$ 就可以用 z_t^i 的线性函数表示如下

$$\hat{q}_t(x)=\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{I}z_t^i,$$

这里 z_t^i 与 x, r_t^i 之间应满足线性不等式 $G_t(x,r_t^i)+M(1-z_t^i)\ge 0$ 与 $G_t(x,r_t^i)\le Mz_t^i$, $z_t^i\in\{0,1\}$，其中 M 是一个取值比 $G_t(x,r_t^i)$ 的最大值还要大的数。因为在概率约束中我们已对 z_t^i 加

入了更严格的下界限制，不等式 $G_t(x, r_t^i) \le M z_t^i$ 实际上已不起作用，所以在模型中可不加入此不等式。

通过 (16) 式中 z_t^i 的引入和上述的转换，我们就可将原概率约束模型 (1)-(4) 转化为如下形式的整数线性规划问题

$$\min \quad f(x) \tag{17}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{I} z_t^i \ge \alpha_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{J} a_{tj} x_j + \delta_t - r_t^i + M(1 - z_t^i) \ge 0, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \quad i = 1, 2, \cdots, I, \tag{19}$$

$$x \in X, \quad z \in \{0, 1\}^{I \times T}. \tag{20}$$

由于实际中 I, J, T 等的值均比较大，上述问题往往是大规模的线性整数规划，直接用经典的分枝定界法或者割平面法很难在短时间内找到满意的解。为有效求解问题 (17)-(20)，我们将借鉴处理大规模线性规划的分解算法的思想，通过对偶的方法将问题的求解分解为一系列小规模问题的处理。

观察整数线性规划 (17)-(20)，除了概率约束外，其余约束都因为关联所有决策变量而不具可分性。如果强行将其关于各个样本分成 I 个子规划问题，则可能会导致在不同情形下的最优决策不一致，为克服这一困难，我们引入类似随机规划中非预期性约束 (nonanticipativity constraints) 的一组约束为 $x^{i_1} = x^{i_2}$, $i_1, i_2 = 1, \cdots, I$，这里 x^{i_1} 表示情景 (样本) i_1 下决策向量的值，其余类同。此约束要求任意两个不同情景下的决策相同。为减少此类约束的个数，我们可要求对每一个情景，都有一个约束来保证其下的决策与另一任意情景下的决策相同，这样仅需要 I 个约束。值得注意的是，这里引入约束的顺序是多样的，如令任意情景下的决策均等于第一个情景下的决策 $x^i = x^1$, $i = 2, \cdots, I$，抑或令任意两个相邻情景下的解均相等 $x^1 = x^n$, $x^i = x^{i-1}$, $i = 2, \cdots, I$。以下我们采用第二种，即每两个相邻情景间进行约束的方法。

对应于上述引入的情景决策，原本的目标函数 $f(x)$ 就可以表示为 $f(x^1), f(x^2), \cdots, f(x^I)$ 的某种线性组合，本文根据各个情景发生的概率将它们进行加权求和，即令

$$\widehat{f}(x) = \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{I} f(x^i).$$

有了上述的非预期性约束，我们就可利用 Lagrange 松弛法，将所有非预期约束和概率约束通过引入 Lagrange 乘子放缩至目标函数中，从而保证剩余约束均相对于不同的情景 i 可分。该方法的优点在于可通过一系列较容易求解的小规模问题的处理来逼近原本大规模、很难求解的问题，可大幅度提高求解效率，在较短时间内得到满足精度要求的解。

Lagrange 松弛因子的引入将原规划问题转化为一个两层的优化问题。具体地，令

$$\lambda^1 = [\lambda_1^1, \lambda_2^1, \cdots, \lambda_T^1]^{\mathrm{T}}, \quad \lambda^2 = [\lambda_{1,1}^2, \lambda_{1,2}^2, \cdots, \lambda_{1,J}^2, \cdots, \lambda_{I,J}^2]^{\mathrm{T}}, \quad \lambda = [\lambda^{1\mathrm{T}}, \lambda^{2\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

内层需求解的最优化问题可表述为

$$V_{LR}(\lambda) = \min \quad \widehat{f}(x) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^1 \Big(\sum_{i=1}^{I} \pi^i z_t^i - \alpha_t \Big) + \sum_{j=1}^{J} \Big(\lambda_{1,j}^2 (x_j^1 - x_j^I) + \sum_{i=2}^{I} \lambda_{i,j}^2 (x_j^i - x_j^{i-1}) \Big) \quad (21)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{J} a_{tj} x_j^i + \delta_t - r_t^i + M(1 - z_t^i) \ge 0, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \quad i = 1, 2, \cdots, I, \quad (22)$$

$$z \in \{0,1\}^{I \times T}, \quad x^i \in X, \quad i = 1, \cdots, I. \quad (23)$$

同时，外层的优化问题需对Lagrange乘子寻优，即求解下列优化问题

$$\max_{\lambda_1 \ge 0} \quad V_{LR}(\lambda). \quad (24)$$

对于整数线性规划问题(21)-(23)，因为目标函数和约束均可对i分解，故而其可等价于I个子规划。对于每个子规划，我们均可运用分枝定界法与割平面法相结合的方法来快速求解，如可直接利用Xpress等优化软件。以下不再赘述。

对于要求部分变量非负的连续优化问题(24)，我们可采用基于线性搜索的优化算法。那么最核心的内容即在于如何确定搜索方向和选取合适的搜索步长。在本文的模型中，因原问题为离散问题，其本身不具有梯度，而精确的次梯度又很难得到，故我们使用以下方向

$$d = \Big[\sum_{i=1}^{I} \pi^i z_1^i - \alpha_1, \sum_{i=1}^{I} \pi^i z_2^i - \alpha_2, \cdots, \sum_{i=1}^{I} \pi^i z_T^i - \alpha_T, x_1^1 - x_1^I, x_2^1 - x_2^I, \cdots, x_J^1 - x_J^I,$$
$$x_1^2 - x_1^1, x_2^2 - x_2^1, \cdots, x_J^2 - x_J^1, \cdots, x_1^I - x_1^{I-1}, x_2^I - x_2^{I-1}, \cdots, x_J^I - x_J^{I-1} \Big]^{\mathrm{T}}. \quad (25)$$

这种方向对应于文献中所谓的替代次梯度。对于一般线性整数规划问题，文献[22]肯定了替代次梯度方向在Lagrange松弛类方法中的有效性，认为它能减少对偶问题求解过程的计算量，这正是我们按上述方法确定搜索方向d的原因。

虽然我们选取的方向可看作是对次梯度方向的近似，但因原问题的离散性，经典次梯度算法中的步长规则并不适用我们的问题。为有效求解问题(24)，我们采用在非光滑优化中较常用的信赖域技术[23,24]来确定搜索步长。信赖域方法的思想是依照每次迭代对目标函数值改进的效果来确定下一步的步长，若上一步迭代改进明显，说明此方向很好，则加大步长以求更快下降；若上一步迭代改进不明显，则缩小步长，以免在不好的方向上前进过多。应用到我们的问题，我们将通过实时观察此次迭代和上次迭代之间改进的程度，这里选用目标函数值总的下降量作为改进程度的度量。当本次迭代目标值减去上次迭代目标值小于θ_L时，则增大步长；当相应的差值大于θ_U时，则减小步长；当介于前述两种情形之间时，步长保持不变。

至此，我们可构建如下确定最优Lagrange乘子的迭代算法如下：

步骤1 初始化Lagrange乘子$\lambda_t^{1(0)} = 1$，$t = 1, \cdots, T$，$\lambda_{i,j}^{2(0)} = 0$，$i = 1, \cdots, I$，$j = 1, \cdots, J$，记相应的乘子向量为$\lambda^{(0)}$，并选取参数$\theta_L > 1$，$0 < \theta_U < 1$，η_L和η_U的值。给定迭代步数上限K，令$k = 1$，$s_k = 1$。

步骤2 求解对应于当前乘子$\lambda^{(k)}$的最优化问题(21)-(23)，得最优解$x^{(k)}$及最优值$V_{LR}(\lambda^{(k)})$。

步骤3 若$V_{LR}(\lambda^{(k)}) - V_{LR}(\lambda^{(k-1)}) < \theta_L$，令$s^{(k)} = \eta_L \cdot s^{(k-1)}$；若$V_{LR}(\lambda^{(k)}) - V_{LR}(\lambda^{(k-1)}) > \theta_U$，令$s^{(k)} = \eta_U \cdot s^{(k-1)}$；否则，令$s^{(k)} = s^{(k-1)}$。

步骤4 通过(25)式计算当前步的搜索方向$d^{(k)}$，并令$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + s^{(k)} \cdot d^{(k)}$。若对某个$t$，$\lambda_t^{1(k+1)} < 0$，则令$\lambda_t^{1(k+1)} = 0$。

步骤5 若对任意的i_1, i_2和j，都有$x_j^{i_1(k)} = x_j^{i_2(k)}$，则终止，当前的解向量$x^{(k)}$即为问题(17)-(20)的最优解；若$k > K$，终止，取$x^{(k)}$为问题(17)-(20)的近似解；否则，令$k = k+1$，转入步骤2。

对于联合概率约束模型(10)-(12)，亦可通过与对问题(7)-(9)类似的方法将其转化为下列整数线性规划问题

$$\begin{aligned}
\min\quad & \hat{f}(x)\\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{I}\frac{1}{I}\pi^i z^i \geq \alpha,\\
& \sum_{j=1}^{J} a_{tj}x_j + \delta_t - r_t^i + M(1-z^i) \geq 0, \quad t=1,2,\cdots,T, \quad i=1,2,\cdots,I,\\
& x\in X, \quad z\in\{0,1\}^I.
\end{aligned}$$

对于该问题，可完全同上采用Lagrange松弛法进一步分解。因为求解算法的导出完全类似，这里就不赘述了。

4 数值例子

为说明本文所建模型的合理性、所导出样本平均近似问题的可解性与所设计松弛分解算法的有效性与收敛性，我们在本节进行两组数值实验，均以某个实际话务中心的员工安排为背景，X包括我们在模型(1)-(3)后简单介绍的公平性、特殊班次等约束。

首先考虑第一组实验，我们利用历史话务量数据，预测出未来一月的基本人力需求量。考虑到未来需求的随机波动性与预测的不精确性，我们假定预测值存在一服从期望值为0的正态分布的随机扰动。也就是说，人力需求量可被看做服从均值为预测人力需求量的正态分布。基于正态分布的累加分布函数，我们很容易将模型(1)-(3)转化为整数线性规划问题，并找到其精确最优解。

代替上述通常的预测方法，我们采用样本平均法来构建形如(17)-(20)的规划问题。具体地，使用不同数量的样本来近似人力需求量的分布，然后在不同样本集下求解样本平均近似问题(17)-(20)，并将所得解与原问题的精确最优解进行比较，检验近似问题的最优解是否随着样本数量的增大收敛于原问题的精确最优解。

为克服简单随机抽样工作量大、方差大的不足，我们使用等距抽样的方法来生成样本数据集。这种方法的好处在于抽样过程简单。相较于抽取I个样本的简单随机抽样，等距抽样所需随机抽取的次数仅为1，这节约了很多工作量。我们分别选取20个样本与50个样本进行实验，同时与原问题进行对比。三组实验采用相同的置信度与偏差容忍度，并对任意$t = 1,\cdots,T$，取$\alpha_t = 0.98$, $\delta_t = -2 + 0.05 * r_t$。为便于比较，我们在表1中列出实际中各天所需的最小人力。

表1: 样本近似问题最优值与原始问题最优值的比较

天	1	2	3	4	5	6	7	8	9-31	合计
原始问题	84	84	77	70	68	66	68	68	$\cdots$	2209
20个样本平均近似	87	88	81	73	71	69	71	71	$\cdots$	2309
50个样本平均近似	85	85	78	71	68	66	68	68	$\cdots$	2222

为对比说明不同结果，我们将不同天原问题精确的最优值、20和50个样本下样本平均问题的最优值，即每天所需最小人力绘制于图1中。

从图1中不难看出，随着样本量的增大，样本平均近似问题的最优值逐渐逼近原始问题的最优值，尤其是在50个样本时，差别就已经很小了。

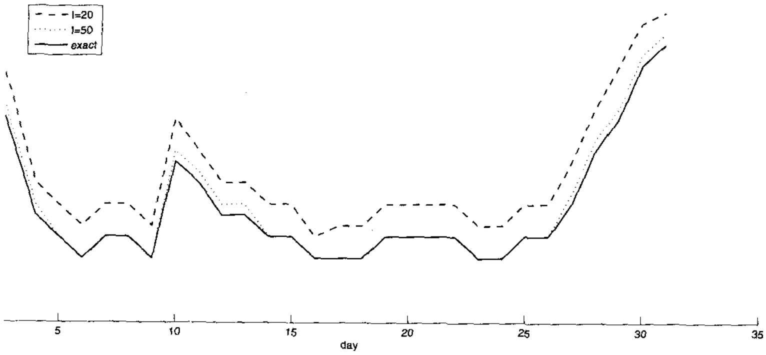

图1: 样本平均近似问题最优值与原问题最优值的比较

作为用户可调节的选项，偏差容忍度决定了概率约束在限制可行解上所起作用的大小，从而影响到问题最优值的大小。为此，我们考虑另一组实验，研究不同偏差容忍程度对问题最优解与最优值的影响。我们考虑两种形式的偏差：绝对偏差和相对偏差。不难理解，绝对(相对)偏差越少，对应问题的最优值越小，而相对偏差方式较绝对偏差方式，对应的最优值一般较大。

为验证上述结论，我们设计了四组实验，它们分别是：较大的绝对偏差 $\text{bias}_t = 1$, $t = 1, \cdots, T$；较小的绝对偏差 $\text{bias}_t = 0.5$, $t = 1, \cdots, T$；较大的相对偏差 $\text{bias}_t = 0.05 * r_t$, $t = 1, \cdots, T$ 和较小的相对偏差 $\text{bias}_t = 0.03 * r_t$, $t = 1, \cdots, T$。我们再统一令 $\delta_t = -2 + \text{bias}_t$, $t = 1, \cdots, T$, $\alpha_t = 0.98$, $t = 1, \cdots, T$，样本量 $I = 20$。为考虑概率约束不起作用时问题最优值的变化，我们特增加一次对照实验，它对应于 $\text{bias}_t = -\infty$，此时所得最优值应为上述情形下最优值的下界。上述各种情况下所得最优值见表2。

表2: 不同偏差容忍程度下问题最优值的比较

天	1	2	3	4	5	6	7	8	9-31	合计
$\text{bias}_t = -\infty$ (无约束问题)	78	78	72	65	63	61	63	63	$\cdots$	2055
$bias_t = 0.1$	82	81	75	68	66	64	66	66	$\cdots$	2215
$\text{bias}_t = 0.5$	80	81	75	68	66	64	66	66	$\cdots$	2140
$\text{bias}_t = 0.05 * r_t$	87	88	81	73	71	69	71	71	$\cdots$	2309
$\text{bias}_t = 0.03 * r_t$	82	84	78	70	68	67	69	69	$\cdots$	2218

为进一步了解整个月内最优值的变化，我们将上述五组解的结果在图2中予以展示。

从表2与图2中可以看出，无论是绝对偏差还是相对偏差，偏差值较大时问题的最优值均较大，较小时问题的最优值较小，这与前述的理论结论是一致的。而绝对偏差情形与相对偏差情形相比较，绝对偏差下对应的最优值要小于相对偏差下对应的最优值。

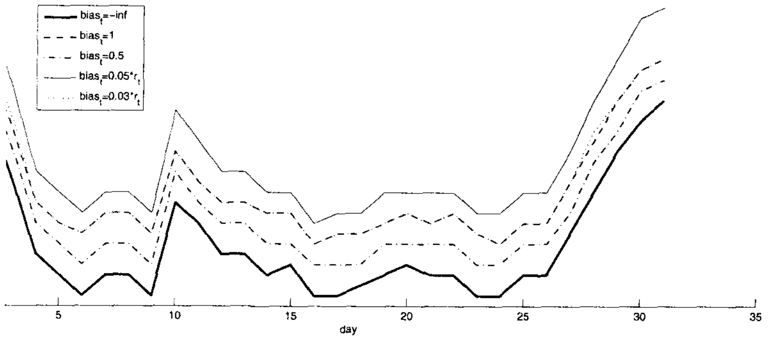

图 2: 不同偏差容忍程度下问题最优值的比较

5 结论

相较已有文献，本文所建立的带有概率约束条件的智能排班模型更精确地描述了人力需求限制的要求，从大概率角度有效地限制了人力不足，更符合客户期望。而我们基于样本平均近似方法、Lagrange松弛法、分解算法等思想所设计的嵌套分解算法也较已有算法更为有效。然而，在样本平均近似方法中，样本的选取对结果有着较大的影响，故而如何寻找一种更稳定、有效的抽样方法仍待更深入的研究。

参考文献:

[1] Dantzig G. A comment on Edie's traffic delay at toll booths[J]. Operations Research, 1954, 2: 339-341

[2] Baker K R. Workforce allocation in cyclic scheduling problems: a survey[J]. Operational Research Quarterly, 1976, 27: 155-167

[3] Billionnet A. Integer programming to schedule a hierarchical workforce with variable demands[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 114: 105-114

[4] Bechtold S E, Jacobs L W. Implicit modeling of flexible break assignments in optimal shift scheduling[J]. Management Science, 1990, 36(11): 1339-1351

[5] Alfares H K. Survey, categorization, and comparison of recent tour scheduling literature[J]. Annals of Operations Research, 2004, 127: 145-175

[6] Rekik M, Cordeau J F. Implicit shift scheduling with multiple breaks and work stretch duration restrictions[J]. Journal of Scheduling, 2009, 10(1): 49-75

[7] Bard J F, Purnomo H W. Cyclic preference scheduling of nurses using a Lagrangian-based heuristic[J]. Journal of Scheduling, 2007, 10(1): 5-23

[8] Yakoob S A, Sherali H. Mixed-integer programming models for an employee scheduling problem with multiple shifts and work locations[J]. Annals of Operations Research, 2007, 155: 119-142

[9] Baker K R, Magazine M T. Work force scheduling with cyclic demands and days-off constraints[J]. Management Science, 1977, 24: 161-167

[10] Gan S, *et al.* Mitotic and postmitotic senescence in plants[J]. Science's SAGE KE, 2003: 7

[11] Easton F F, Rossin D F. A Stochastic goal program for employee scheduling[J]. Decision Sciences, 1996, 27(3): 541-568

[12] Mabert V. A case study of encoder shift scheduling under uncertainty[J]. Management Science, 1979, 25(7): 623-631

[13] Bordoloi S K. Agent recruitment planning in knowledge-intensive call centers[J]. Journal of Service Research, 2004, 6(4): 309-323

[14] Ruszczynski A, Shapiro A. Handbooks in OR&MS: Stochastic Programming[M]. North-Holl and Amsterdam: Elsevier Science, 2003
[15] Easton F F, Rossin D F. Sufficient working subsets for the tour scheduling problem[J]. Management Science, 1991, 37(11): 1441-1451
[16] Bechtold S E, Showalter M J. A methodology for labor scheduling in an service operating system[J]. Decision Sciences, 1987, 18(1): 89-102
[17] Easton F F, Mansourb N. A distributed genetic algorithm for deterministic and stochastic labor scheduling problems[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 118(3): 505-523
[18] Aykin T. A comparative evaluation of modeling approaches to the labor shift scheduling problem[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 125: 381-397
[19] Beaumont N. Scheduling staff using mixed integer programming[J]. European Journal of Operational Research, 1997, 98(3): 473-484
[20] Luedtke J, Ahmed S. A sample approximation approach for optimization with probabilistic constraints[J]. SIAM Journal on Optimization, 2008, 19: 674-699
[21] Pagnoncelli B K, Ahmed S, Shapiro A. Sample average approximation method for chance constrained programming: theory and applications[J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2009, 142(2): 399-416
[22] Zhao X, Lu P B, Wang J. Surrogate gradient algorithm for lagrangian relaxation[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 100(3): 699-712
[23] Yuan Y. Conditions for convergence of trust region algorithm for nonsmooth optimization[J]. Mathematical Programming, 1985, 31: 220-228
[24] Fletcher R. Practical Methods of Optimization[M]. Chichester: John Wiely Inc, 1987

Chance Constrained Programming Models for Intelligent Scheduling Problems and Their Efficient Solution

CHEN Zhi-ping[1], LIU Jia[1], CHENG Bei[2]

(1- Department of Scientific Computing and Applied Software, Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049; 2- Jinhe Center for Economic Research, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: Due to their extensive application areas and solution difficulty, different forms of intelligent scheduling problems have now become a research hot in operations research. The current models can not properly reflect practical characteristics of labor requirement constraints and the relevant algorithms lack necessary efficiency. To overcome these shortcomings, two forms of chance constrained programming models are proposed for comprehensive scheduling problems to flexibly describe the labor requirement constraints. By using the sample average approximation technique and the Big-M method, we transform the chance constrained programs into large-scale integer programming problems. An efficient nested decomposition algorithm is designed by simultaneously utilizing the Lagrange relaxation technique, the decomposition method and the trust region scheme. Finally, some numerical results illustrate the reasonability of the proposed models and the efficiency of the proposed algorithm.

Keywords: intelligent scheduling; labor requirements; chance-constrained; sample average approximation; the big-M method; Lagrangian relaxation; trust region

Received: 12 Aug 2010. **Accepted:** 18 Oct 2010.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (70971109).